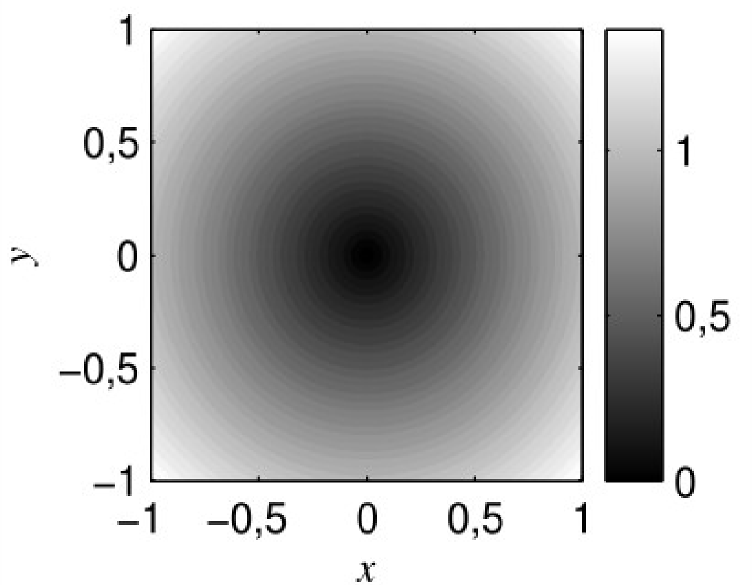
Lauko teorijos elementai

•

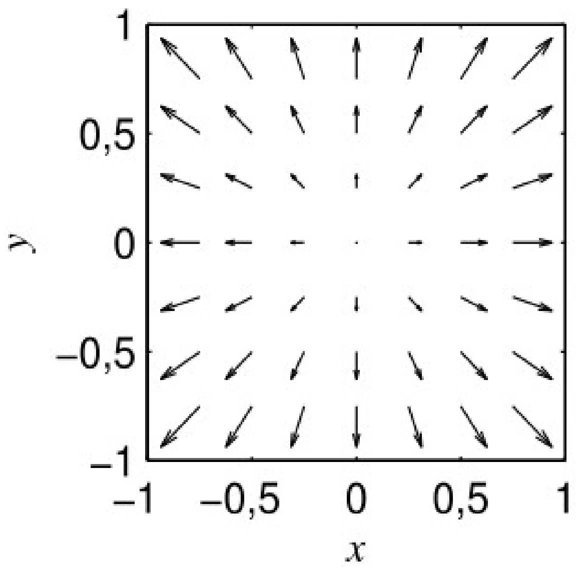
Skaliarinis ir vektorinis laukai

- **Apibrėžimas**. Tarkime, kad Ω yra *n*-matės erdvės sritis. Funkcija, kuri kiekvienam srities taškui P iš Ω priskiria skaičių $f(P)$, vadinama <u>skaliarine</u>. Dar sakoma, kad funkcija $f : \Omega \to \mathbf{R}$ apibrėžia <u>skaliarinį lauką</u> srityje Ω.

- **Apibrežimas**. Funkcija, kuri kiekvienam srities taškui P iš Ω priskiria vektorių $\vec{f}(P) = (f_1(p),\ f_2(P),\ \dots\ f_n(P))$, vadinama <u>vektorine</u>. Dar sakoma, kad funkcija apibrėžia <u>vektorinį</u> <u>lauką</u> srityje Ω.



a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$



b) $\vec{f}(x, y) = (x, y)/4$

1.1 pav. Skaliarinis (a) ir vektorinis (b) laukai plokštumos srityje Ω: $-1 \le x, y \le 1$

Skaliarinis ir vektorinis laukai

- Skaliarinio lauko sąvoka yra naudojama dydžiams, kurių reikšmę bet kuriame nagrinėjamos srities taške galima išreikšti vienu skaičiumi. Pavyzdžiui, temperatūra, slėgis yra skaliariniai dydžiai. Atitinkamai naudojamos sąvokos: kūno temperatūros laukas, atmosferos slėgio laukas.

- Vektorinio lauko sąvoka naudojama fizikiniams dydžiams, kurie turi kryptį, pavyzdžiui, oro greičio laukui, elektriniam laukui, magnetiniam laukui.

Invariantinis laukas

- Fizikoje skaliarinio ir vektorinio lauko sąvokoms taikoma papildoma sąlyga.

- Reikalaujama, kad lauko reikšmė bet kuriame srities taške priklausytų tik nuo paties taško, o ne nuo koordinačių sistemos pasirinkimo, t. y. atitinkama lauką nusakanti skaliarinė (arba vektorinė) funkcija turi būti <u>invariantinė</u>.

- *Pavyzdys. Invariantinis skaliarinis laukas f: atstumas nuo vieno taško iki kito erdvėje*.

$$f(x, y, z) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

$$f(x, y, z) = |x-x_0| + |y-y_0| + |z-z_0|$$

$$f(x, y, z) = max\{|x-x_0|\ ,\ |y-y_0|\ ,\ |z-z_0|\}$$

Gradientas

- **Apibrėžimas**. Tarkime, kad skaliarinė funkcija *f*, apibrėžianti skaliarinį lauką srityje $\Omega \subset R^n$, yra diferencijuojama šioje srityje. Vektorinė funkcija

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

vadinama skaliarinio lauko *f* gradientu.

Pagrindinės gradiento diferencialinio operatoriaus savybės (įsitikinkite savarankiškai):

1. $\nabla c = \vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, kur c – konstanta.

2. $\nabla (f + g) = \nabla f + \nabla g$.

3. $\nabla (fg) = f \nabla g + g \nabla f$.

Gradientas

- Kaip žinome, vieno kintamojo funkcijos išvestinė parodo funkcijos kitimo greitį ir kryptį (didėjimą arba mažėjimą). Kelių kintamųjų funkcijos dalinė išvestinė parodo jos kitimo greitį bei kryptį pagal atitinkamą kintamąjį, geometriškai – atitinkamos koordinatinės ašies kryptimi.

- Apibrėžkime dydį, apibūdinantį skaliarinės funkcijos kitimo greitį bet kuria kryptimi ir parodykime jo sąryšį su funkcijos gradientu.

Gradientas

Tarkime, kad $\vec{e} \in \mathbb{R}^n$ yra vienetinio ilgio vektorius ($|\vec{e}| = 1$). Jis nurodo tam tikrą kryptį šioje erdvėje.

Apibrėžimas. 1.1.5 *Skaliarinės funkcijos f išvestine vektoriaus $\vec{e}$ kryptimi taške $\vec{x}^0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ vadinama riba*

$$D_{\vec{e}} f(\vec{x}^0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x}^0 + h\vec{e}) - f(\vec{x}^0)}{h}. \tag{1.1..2}$$

Ši riba dar vadinama kryptine išvestine ir žymima simboliu $\frac{\partial f}{\partial e}$.

Gradientas

teorema. 1 *Jei skaliarinė funkcija f yra diferencijuojama taške $\vec{x}^0$, tai šiame taške ji turi kryptinę išvestinę bet kuria kryptimi ($\forall \vec{e} \in \mathbb{R}^n : |\vec{e}| = 1$) ir*

$$D_{\vec{e}} f(\vec{x}^0) = \nabla f(\vec{x}^0) \cdot \vec{e}. \tag{1.1..3}$$

Įrodymas. Fiksuotam taškui $\vec{x}^0$ ir krypties vektoriui $\vec{e}$ apibrėžkime vieno kintamojo funkciją $\vec{r}(h) = \vec{x}^0 + h\vec{e}$. Sudėtinė funkcija $G(h) = f(\vec{r}(h))$ yra diferencijuojama taške $h = 0$, todėl iš 1.1.5 apibrėžimo gauname:

$$D_{\vec{e}} f(\vec{x}^0) = \lim_{h \to 0} \frac{G(h) - G(0)}{h} = G'(0).$$

Pritaikę sudėtinės funkcijos pilnosios išvestinės taisyklę ir dviejų vektorių skaliarinės sandaugos apibrėžimą, gauname

$$D_{\vec{e}} f(\vec{x}^0) = G'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\vec{x}=\vec{x}^0} \frac{\partial r_i}{\partial h}\Big|_{h=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\vec{x}=\vec{x}^0} e_i = \nabla f(\vec{x}^0) \cdot \vec{e}. \quad \square$$

Gradientas

Išvada 1 *Funkcijos kryptinė išvestinė lygi jos gradiento projekcijai atitinkamame vektoriuje:*

$$D_{\vec{e}} f(\vec{x}^0) = \nabla f(\vec{x}^0) \cdot \vec{e} = |\vec{e}| \operatorname{pr}_{\vec{e}} \nabla f(\vec{x}^0) = \operatorname{pr}_{\vec{e}} \nabla f(\vec{x}^0).$$

Pavyzdys. 1.1.3 *Rasti skaliarinio lauko $f(x, y, z) = x^2yz$ išvestinę vektoriaus $\vec{a} = 4\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$ kryptimi taške $P(1; -1; 1)$.*

Išvada 2 *Funkcijos f gradientas taške P nurodo jos greičiausio augimo (maksimalaus didėjimo) kryptį ir greitį ($|\nabla f(P)|$) šiame taške (jei $\nabla f(P) \neq \vec{0}$). Atitinkamai $-\nabla f(P)$ (taip vadinamas antigradientas) nurodo funkcijos f greičiausio mažėjimo kryptį ir greitį ($-|\nabla f(P)|$) taške P.*

Išvada 3 *Jei funkcija f apibrėžia invariantinį skaliarinį lauką srityje Ω, tai ∇f apibrėžia invariantinį vektorinį lauką šioje srityje.*

Gradientas

Apibrėžimas. 1.1.6 *Jei vektorinė funkcija $\vec{v}(P)$ gaunama kaip skaliarinės funkcijos $f(P)$ gradientas, t. y. $\vec{v}(P) = \operatorname{grad} f(P)$, tai funkcija $f(P)$ vadinama $\vec{v}(P)$ potencialu (arba potencialo funkcija), o pati vektorinė funkcija $\vec{v}(P)$ ir atitinkamas vektorinis laukas vadinami potencialiniais arba konservatyviaisiais.*

Potencialiniai (konservatyvieji) vektoriniai laukai yra labai svarbūs fizikoje. Tokių laukų pavyzdžiai yra gravitacinis (gravitacijos jėgos) ir elektrostatinis (Kulono jėgos) laukai.

Lygio paviršiai

Apibrėžimas. 1.1.7 *Trimačio skaliarinio lauko lygio paviršiumi vadinama geometrinė vieta taškų, kuriuose skaliarinės funkcijos* $f = f(x, y, z)$ *reikšmės yra pastovios, t. y. lygio paviršių nusako lygtis* $f(x, y, z) = c = \text{const}$.

Dvimačio skaliarinio lauko atveju gaunamos kreivės ($f(x, y) = c = \text{const}$), *kurios vadinamos lygio kreivėmis arba izolinijomis.*

Lygio paviršiai ir lygio kreivės yra skaliarinio lauko geometrinės charakteristikos. Gerai žinomi pavyzdžiai yra izolinijos, pažyminčios reljefą topografiniuose žemėlapiuose, *izobaros* (vienodo atmosferos slėgio kreivės) ir *izotermos* (vienodos temperatūros kreivės). Fizikoje potencialo lauko lygio paviršiai vadinami *ekvipotencialiniai*s.

Lygio paviršiai

teorema. 2 *Tarkime, kad trimatės erdvės paviršius S yra nusakomas lygtimi $f(x,y,z)=c$, o skaliarinė funkcija f yra diferencijuojama šio paviršiaus taške $P(x_0,y_0,z_0)$. Jei taške P funkcijos f gradientas yra nelygus nuliui* ($\operatorname{grad} f(P) \neq \vec{0}$)*, tai jis yra paviršiaus S normalės šiame taške vektorius.*

Įrodymas. Tarkime, kad $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ yra kreivės C, gulinčios paviršiuje S ir einančios per tašką P, parametrinė reprezentacija, t. y.

$$f(x(t),y(t),z(t)) \equiv c \quad \text{visiems } t, \tag{1.1..5}$$

$$\vec{r}(t_0) = (x_0,y_0,z_0).$$

Lygio paviršiai

Tarkime, kad ši kreivės reprezentacijos funkcija yra diferencijuojama taške t_0. Tada vektorius $\vec{r}\,'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ yra kreivės C liestinės taške P krypties vektorius. Visų tokių kreivių liestinės sudaro paviršiaus S *liečiamąją plokštumą* taške P. Diferencijuodami (1.1..5) lygtį pagal t ir kairei jos pusei taikydami sudėtinės funkcijos diferencijavimo taisyklę taške t_0 gauname:

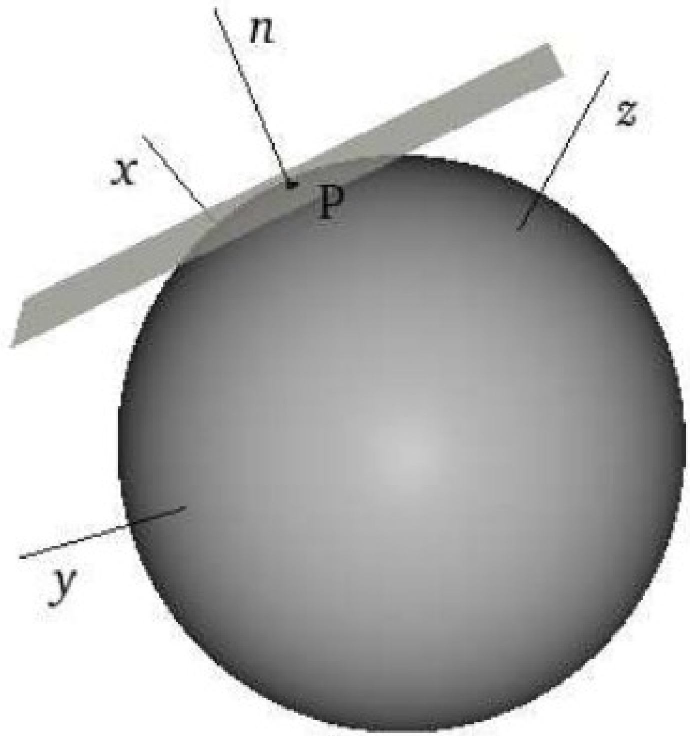
$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t))\Big|_{t=t_0} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_P x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_P y'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_P z'(t_0) =$$
$$(\operatorname{grad} f(P)) \cdot \vec{r}\,'(t_0) = 0.$$

Iš čia gauname, kad vektorius $\operatorname{grad} f(P)$ yra statmenas bet kokios kreivės, gulinčios paviršiuje S ir einančios per tašką P, liestinei šiame taške, t. y. jis yra statmenas paviršiaus liečiamajai plokštumai tame taške.

Primename, kad tiesė, nubrėžta per lietimosi tašką P statmenai liečiamajai plokštumai, vadinama *paviršiaus normale* taške P, o šios tiesės krypties vektorius – *paviršiaus normalės vektoriumi* šiame taške. Taigi vektorius $\operatorname{grad} f(P)$ yra paviršiaus S normalės vektorius taške P. $\square$

Lygio paviršiai

Pavyzdys. 1.1.4 *Rasti paviršiaus* $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ *(1.2 pav.) normalės vektorių, normalės ir liečiamosios plokštumos lygtis taške* $P(2;1;2)$.



1.2 pav. Paviršius (sfera), liečiamoji plokštuma ir normalė n taške P

Vektorinės linijos

Apibrėžimas. 1.1.8 *Vektorinio lauko* $\vec{f}$ *vektorinėmis linijomis vadinamos kreivės, kurių kiekvieno taško liestinės kryptis sutampa su to lauko apibrėžtais vektoriais šiuose taškuose.*

Jeigu vektorinis laukas yra kokios nors jėgos laukas, tai tokios vektorinės linijos dar vadinamos jėgos linijomis (pavyzdžiui, elektros lauko jėgos linijomis).

Jeigu vektorinis laukas yra kokio nors tekėjimo greičio laukas, tai tokios vektorinės linijos dar vadinamos tėkmės linijomis (pavyzdžiui, tekančio skysčio tėkmės linijomis).

Vektorinės linijos

Tarkime, kad $\vec{r}(t) = (x(t),\, y(t),\, z(t))$ yra vektorinės linijos parametrinis pavidalas. Tada iš 1.1.8 apibrėžimo gauname, kad šios kreivės liestinės krypties vektorius

$$\vec{r}\,'(t) = (x'(t),\, y'(t),\, z'(t)) = (dx/dt,\, dy/dt,\, dz/dt)$$

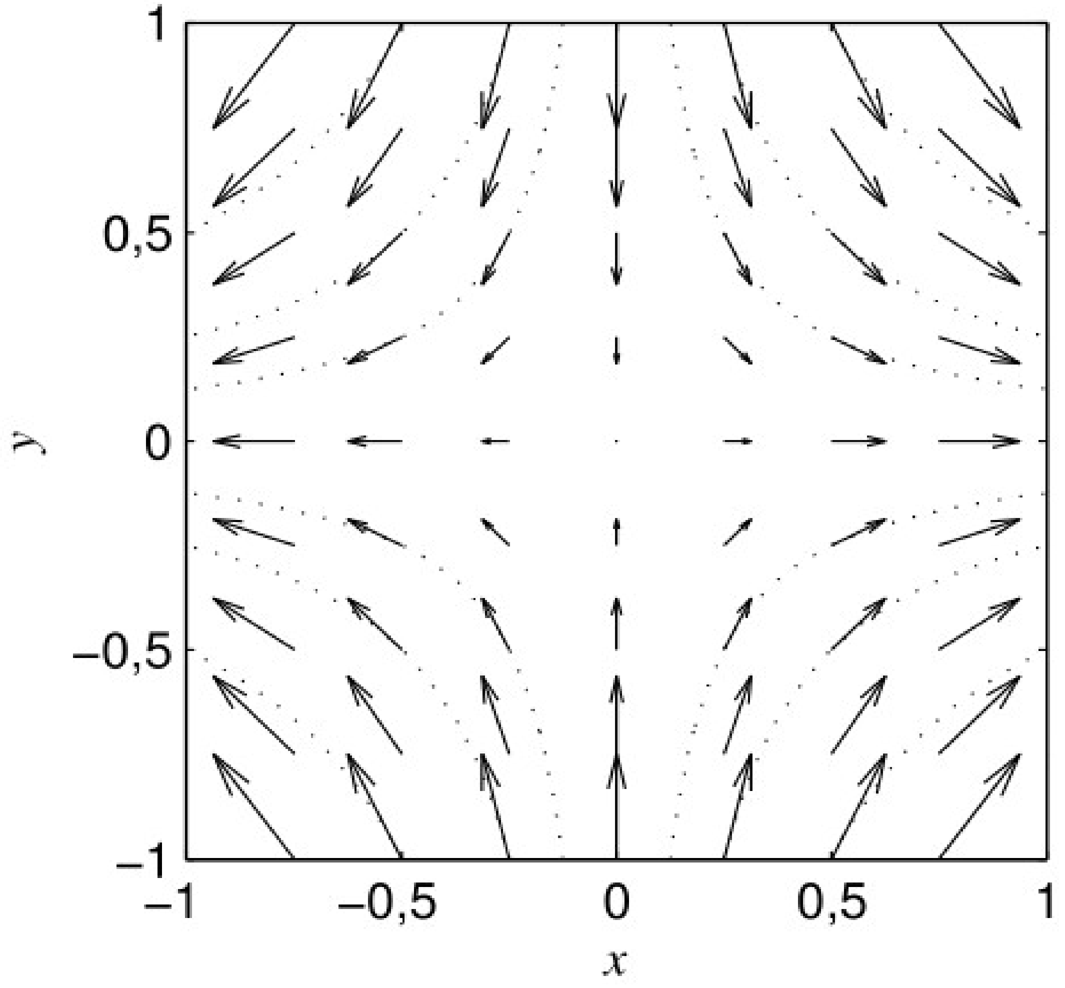
turi sutapti su vektorinio lauko $\vec{f} = (f_1,\, f_2,\, f_3)$ vektoriais visuose kreivės taškuose, t. y.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(\vec{r}(t)) \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(\vec{r}(t)) \\ \dfrac{dz}{dt} = f_3(\vec{r}(t)) \end{cases} \quad \text{arba} \quad \frac{dx}{f_1} = \frac{dy}{f_2} = \frac{dz}{f_3}. \tag{1.1..6}$$

Taigi, vektorinės linijos yra (1.1..6) diferencialinių lygčių sistemos sprendiniai.

Pavyzdys. 1.1.5 *Yra žinomas tekančio skysčio greitis srityje* $\Omega = [-1,\, 1] \times [-1,\, 1]$: $\vec{v}(x, y) = \frac{1}{4}x\vec{i} - \frac{1}{4}y\vec{j}$. *Rasti ir nubraižyti skysčio tėkmės linijas.*

Vektorinės linijos



1.3 pav. Tekėjimo greičių laukas $\vec{v}(x,y) = \frac{1}{4}x\vec{i} - \frac{1}{4}y\vec{j}$ ir jo tėkmės linijos

Uždaviniai

1. Lygio kreivėmis pavaizduokite duotą skaliarinį lauką f, o rodyklėmis – vektorinį lauką ∇f:

   a) $f = x^2 + \frac{1}{9}y^2$; b) $f = \frac{x}{y}$.

2. Duotas tekančio skysčio greičio potencialas f. Raskite skysčio greitį taške P, kai:

   a) $f = \ln(x^2 + y^2)$, $P(4;3)$;

   b) $f = e^x \sin y$, $P(1;\pi)$;

   c) $f = (x^2 + y + 2 + z^2)^{-1/2}$, $P(2;1;2)$.

3. Duotas plokštumos temperatūros laukas T. Nustatykite, kuria kryptimi temperatūra taške P auga greičiausiai. Rodykle pavaizduokite rastą kryptį:

   a) $f = \arctan \frac{y}{x}$, $P(2;2)$; b) $f = x/(x^2 + y^2)$, $P(4;0)$.

4. Kalno paviršius yra nusakytas kaip funkcija $z(x,y) = 2000 - 4x^2 - y^2$, nurodanti kalno taško aukštį virš jūros lygio. Raskite greičiausio nusileidimo kryptį taške $P(3;6)$. Kaip atrodo kalnas?

Uždaviniai

5. Raskite paviršiaus S liečiamosios plokštumos ir normalės lygtis taške P:

   a) S: $x^2 - y^2 + 4z^2 = 67$, $P(-2; 1; 4)$;

   b) S: $x^2 + 3y^2 + z^2 = 28$, $P(4; 1; 3)$;

   c) S: $z = x^2 + y + 2$, $P(3; 4; 25)$.

6. Raskite paviršiaus $xy + z^2 + xz = 1$ liečiamosios plokštumos lygtį, kai ji lygiagreti plokštumai $x - y + 2z = 0$.

7. Raskite kampą tarp skaliarinių laukų $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ ir $v = 2x^2 - 3xy + y^2z + 2xyz$ taške $P(1; -2; 2)$.

8. Raskite skaliarinio lauko f kryptinę išvestinę taške P nurodyta kryptimi:

   a) $f = 2xyz$, $P(-1; 1; 3)$ vektoriaus $\vec{a} = (1,\ 1,\ 2)$ kryptimi;

   b) $f = (x^2 + y + 2 + z^2)^{-1/2}$, $P(4; 2; -4)$ funkcijos gradiento šiame taške kryptimi;

Divergencija

Apibrėžimas. 1.2.1 *Tarkime, kad vektorinė funkcija $\vec{f}$, apibrėžianti atitinkamą vektorinį lauką srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, yra diferencijuojama šioje srityje. Skaliarinė funkcija*

$$\operatorname{div} \vec{f} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \tag{1.2..1}$$

vadinama vektorinio lauko $\vec{f}$ divergencija. Diferencialinis operatorius div *vadinamas divergencijos operatoriumi.*

Kitas populiarus divergencijos operatoriaus žymėjimas gaunamas naudojant gradiento operatorių ∇ (nabla) ir skaliarinę sandaugą:

$$\operatorname{div} \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i.$$

Pavyzdys. 1.2.1 *Rasti vektorinio lauko $\vec{f}(x, y, z) = 3x^2 z\vec{i} + 2x^2 y\vec{j} - yz^2\vec{k}$ divergenciją ir jos reikšmę taške $P(1; 2; -1)$.*

Divergencija

Pagrindinės divergencijos diferencialinio operatoriaus savybės (įsitikinkite savarankiškai):

1. $\operatorname{div} \vec{c} = 0$, kur $\vec{c}$ – pastovusis vektorius.
2. $\operatorname{div} (\vec{f} + \vec{g}) = \operatorname{div} \vec{f} + \operatorname{div} \vec{g}$.
3. $\operatorname{div} (k\vec{f}) = k \operatorname{div} \vec{f}$, kur k – konstanta.
4. $\operatorname{div} (u\vec{f}) = u \operatorname{div} \vec{f} + \vec{f} \cdot \nabla u$, kur u – skaliarinė funkcija.

Naudodami divergencijos operatorių iš vektorinio lauko gauname skaliarinį lauką. Galime įrodyti, kad jei vektorinis laukas $\vec{f}$ yra invariantinis (nepriklauso nuo koordinačių sistemos pasirinkimo), tai skaliarinis laukas $\operatorname{div} \vec{f}$ irgi yra invariantinis.

Divergencija

Vektorinio dydžio divergencija fizikoje turi svarbią prasmę. Divergencijos laukas rodo vektorinio lauko išeinančiojo ir įeinančiojo srauto skirtumus kiekviename apibrėžimo srities taške. Todėl divergencija vektorinio lauko šaltinių taškuose yra teigiamoji, sugėrimo arba sankaupos taškuose – neigiamoji ir visuose kituose apibrėžimo srities taškuose – lygi nuliui.

Apibrėžimas. 1.2.2 *Vektorinis laukas, kurio divergencija lygi nuliui visuose srities taškuose, t. y.*

$$\operatorname{div} \vec{f} = 0 \quad \text{visiems } \vec{x} \in \Omega, \tag{1.2..2}$$

vadinamas solenoidiniu arba nespūdžiuoju lauku.

Pavyzdžiui, nespūdžiųjų skysčių tekėjimo greičio laukas $\vec{v}$ visada tenkina (1.2..2) lygtį, kuri skysčių dinamikoje vadinama *nespūdumo sąlyga*. Todėl tokių skysčių tekėjimo greičio laukai visada yra nespūdieji.

Laplaso operatorius

Apibrėžimas. 1.2.3 *Tarkime, kad skaliarinė funkcija f, apibrėžianti atitinkamą skaliarinį lauką srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, yra du kartus diferencijuojama šioje srityje. Diferencialinis operatorius, atvaizduojantis skaliarinį lauką f į šio lauko gradiento divergenciją* $\operatorname{div}\operatorname{grad} f$, *vadinamas Laplaso*[1] *operatoriumi (arba laplasianu) ir žymimas Δ (arba ∇^2), t. y.*

$$\Delta f = \operatorname{div}\operatorname{grad} f \qquad (\text{arba} \quad \nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f). \tag{1.2..3}$$

Stačiakampėje koordinačių sistemoje iš 1.1. poskyrio 1.1.4 apibrėžimo ir 1.2. poskyrio 1.2.1 apibrėžimo gauname, kad

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f_i = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_n^2}. \tag{1.2..4}$$

Pavyzdys. 1.2.2 *Apskaičiuoti skaliarinio lauko $f(x, y, z) = \dfrac{xy}{z^2}$ Laplaso operatorių Δf.*

Laplaso operatorius

Pagrindinės Laplaso diferencialinio operatoriaus savybės:

1. $\nabla^2(f+g) = \nabla^2 f + \nabla^2 g$.
2. $\nabla^2(fg) = g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g + f\nabla^2 g$.

Įrodymas. Šias savybes nesunkiai įrodome pasinaudodami jau įrodytomis gradiento ir divergencijos operatorių savybėmis:

1. $\nabla^2(f+g) = \nabla \cdot \nabla(f+g) = \nabla \cdot (\nabla f + \nabla g) = \nabla \cdot \nabla f + \nabla \cdot \nabla g =$
$\nabla^2 f + \nabla^2 g$.

2. $\nabla^2(fg) = \nabla \cdot \nabla(fg) = \nabla \cdot (g\nabla f + f\nabla g) = \nabla \cdot (g\nabla f) + \nabla \cdot (f\nabla g) =$
$g\nabla \cdot \nabla f + \nabla f \cdot \nabla g + f\nabla \cdot \nabla g + \nabla g \cdot \nabla f =$
$g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g + f\nabla^2 g$. □

Laplaso operatorius yra ypatingai svarbus fizikoje. Jis naudojamas sudarant matematinius modelius, kuriais aprašomas bangos sklidimas, šilumos, skysčių tekėjimas, difuzija ir daugelis kitų reiškinių.

Rotorius

Apibrėžkime paskutinį bazinį (kartu su gradientu ir divergencija) lauko teorijos diferencialinį operatorių – rotorių. Kaip ir ankstesniuosius, šį apibrėžimą pateikiame stačiakampėje (Dekarto) koordinačių sistemoje.

Apibrėžimas. 1.2.4 *Tarkime, kad vektorinė funkcija* $\vec{f}(x,y,z) = f_1\vec{i} + f_2\vec{j} + f_3\vec{k}$, *apibrėžianti atitinkamą vektorinį lauką srityje* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, *yra diferencijuojama šioje srityje. Vektorinė funkcija*

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec{k} \qquad (1.2..5)$$

vadinama vektorinio lauko $\vec{f}$ *rotoriumi. Diferencialinis operatorius* rot *vadinamas rotoriaus operatoriumi.*

Kitas populiarus rotoriaus operatoriaus žymėjimas gaunamas naudojant gradiento operatorių nabla ir vektorinę sandaugą:

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}. \qquad (1.2..6)$$

Rotorius

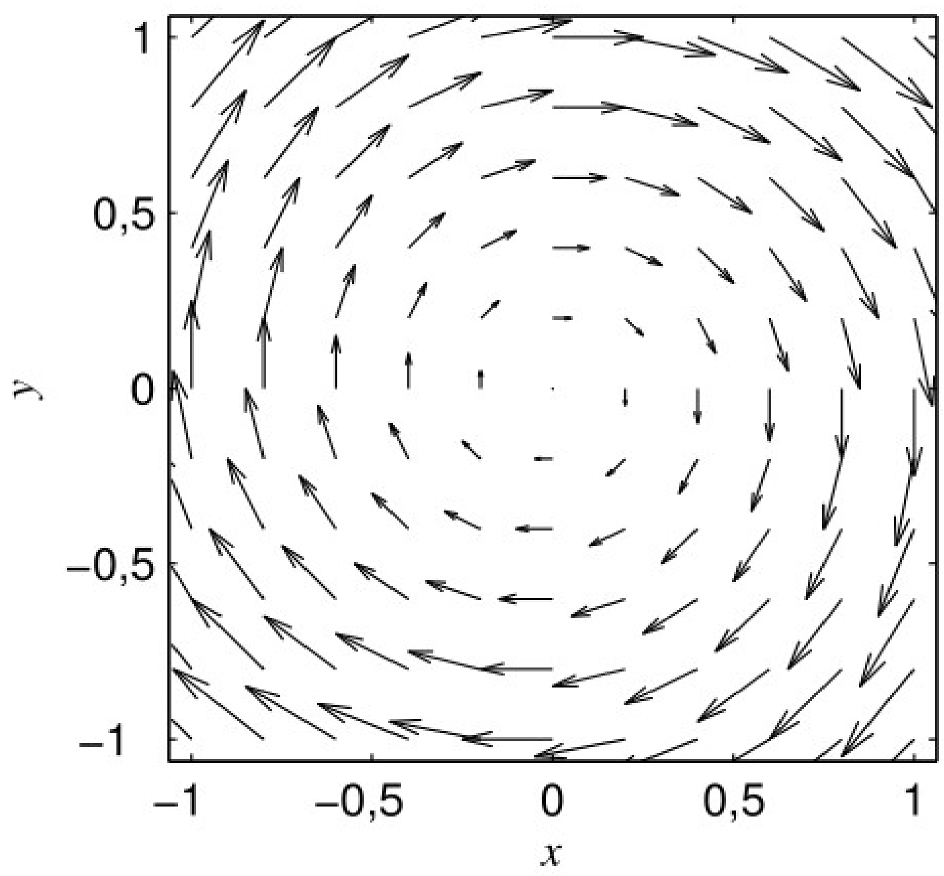
Kaip matome iš pateikto apibrėžimo, naudodami rotoriaus operatorių iš vektorinio lauko gauname kitą vektorinį lauką. Aptarkime jo fizikinę prasmę. Kiekvienam srities taškui $\vec{x} \in \Omega$ rotoriaus vektorius $\operatorname{rot} \vec{f}$ parodo atitinkamo vektorinio lauko $\vec{f}$ sukimąsi (sūkuriavimą) šiame taške. Rotoriaus vektoriaus kryptis nurodo sukimosi ašį (ir kryptį pagal dešiniojo sraigto taisyklę).

Rotoriaus vektoriaus ilgis nurodo sukimosi greitį atitinkamame srities taške. Sukimosi kampinis dažnis (greitis) ω gaunamas kaip

$$\omega = \frac{1}{2} |\operatorname{rot} \vec{f}|.$$

Rotorius

Pavyzdys. 1.2.3 *Išnagrinėti vektorinį lauką* $\vec{f}(x,y,z) = \frac{1}{4}y\vec{i} - \frac{1}{4}x\vec{j}$ *ir rasti jo rotorių.*



1.4 pav. Vektorinis laukas $\vec{f}(x,y,z) = \frac{1}{4}y\vec{i} - \frac{1}{4}x\vec{j}$

Rotorius

Apibrėžimas. 1.2.5 *Vektorinis laukas, kurio rotorius lygus nuliui visuose srities taškuose, t. y.*

$$\operatorname{rot} \vec{f} = 0 \quad \text{visiems } \vec{x} \in \Omega,$$

vadinamas besūkuriu lauku.

Pagrindinės rotoriaus diferencialinio operatoriaus savybės (įsitikinkite savarankiškai):

1. $\operatorname{rot} \vec{c} = 0$, kur $\vec{c}$ – pastovusis vektorius.
2. $\operatorname{rot} (\vec{f} + \vec{g}) = \operatorname{rot} \vec{f} + \operatorname{rot} \vec{g}$.
3. $\operatorname{rot} (k\vec{f}) = k \operatorname{rot} \vec{f}$, kur k – konstanta.
4. $\operatorname{rot} (u\vec{f}) = u \operatorname{rot} \vec{f} + \nabla u \times \vec{f}$, kur u – skaliarinė funkcija.

Kaip ir gradiento bei divergencijos operatorių atvejais, rotoriaus operatoriui yra įrodoma svarbi lauko teorijoje savybė, kad jei vektorinis laukas $\vec{f}$ yra invariantinis (nepriklauso nuo koordinačių sistemos pasirinkimo), tai vektorinis laukas $\operatorname{rot} \vec{f}$ irgi yra invariantinis.

Antrosios eilės diferencialinės operacijos

- Skaliarinio lauko gradiento, vektorinio lauko divergencijos ir rotoriaus radimo operacijos vadinamos pirmosios eilės diferencialinėmis operacijomis.

- Jei skaliarinis ir vektorinis laukai yra bent du kartus diferencijuojamos savo apibrėžimo srityje, tai yra galimos tokios gradiento, divergencijos ir rotoriaus operatorių kombinacijos:

$$\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\, f), \quad \mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\, f), \quad \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\, \vec{v}), \quad \mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\, \vec{v}), \quad \mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\, \vec{v}).$$

Šios operacijos vadinamos *antrosios eilės diferencialinėmis operacijomis* (arba *kartotinėmis lauko teorijos operacijomis*).

Kartotinė operacija $\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\, f)$ apibrėžia labai svarbų Laplaso operatorių Δf. Suformuluokime ir įrodykime teoremą, kurį nusako kitų dviejų kartotinių operacijų rezultatą ir kartu parodo ryšį tarp atitinkamų diferencialinių operatorių.

Antrosios eilės diferencialinės operacijos

teorema. 3

1. Jei skaliarinė funkcija f, apibrėžianti atitinkamą skaliarinį lauką srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, yra du kartus tolydžiai diferencijuojama šioje srityje, tai jos gradiento rotorius yra nulinis vektorius, t. y.

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\, f) = 0 \quad \text{visiems } \vec{x} \in \Omega. \tag{1.2..7}$$

2. Du kartus tolydžiai diferencijuojamos vektorinės funkcijos $\vec{f}$ rotoriaus divergencija yra lygi nuliui, t. y.

$$\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\vec{v}) = 0 \quad \text{visiems } \vec{x} \in \Omega. \tag{1.2..8}$$

Antrosios eilės diferencialinės operacijos

Įrodymas.

1. Nuosekliai taikydami (1.1..1) gradiento ir (1.2..6) rotoriaus operatorius skaliarinei funkcijai f gauname:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right)\vec{k} =$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)\vec{k} =$$

$$0\vec{i} - 0\vec{j} + 0\vec{k} = 0.$$

Antrosios eilės diferencialinės operacijos

2. Nuosekliai taikydami (1.2..5) rotoriaus ir (1.2..1) divergencijos operatorius vektorinei funkcijai $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ gauname:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v}) = \nabla \cdot \left(\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right)\vec{k} \right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) =$$

$$\frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial y} = 0.$$

Čia abu kartus pritaikėme žinomą matematinės analizės teiginį, kad jei funkcija yra du kartus tolydžiai diferencijuojama, tai mišriosios išvestinės reikšmė nepriklauso nuo diferencijavimo tvarkos. □

Uždaviniai

1. Raskite duoto vektorinio lauko $\vec{f}$ divergenciją:

   a) $\vec{f}(x,y,z) = (3x^2z,\ 2x^2y,\ -yz^2)$;

   b) $\vec{f}(x,y,z) = (x^2+y^2,\ 2xyz,\ z^2+x^2)$;

   c) $\vec{f}(x,y,z) = (\sin xy,\ \sin xy,\ z\cos xy)$;

   d) $\vec{f}(x,y,z) = (e^{2x}\cos 2y,\ e^{2x}\sin 2y,\ 5e^{2z})$;

   e) $\vec{f}(x,y,z) = (f_1(y,z),\ f_2(z,x),\ f_3(x,y))$.

2. Raskite duoto vektorinio lauko $\vec{f}$ divergenciją tiesiogiai pagal apibrėžimą ir panaudodami atitinkamą divergencijos operatoriaus savybę:

   a) $\vec{f} = x^2y^2z^2(x,\ y,\ z)$;

   b) $\vec{f} = (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(x,\ y,\ z)$;

   c) $\vec{f} = e^{xyz}(ax\vec{i} + by\vec{j} + cz\vec{k})$.

3. Raskite duoto skaliarinio lauko f Laplaso operatorių:

   a) $f = (y+x)/(y-x)$;

   b) $f = \cos^2 x - \sin^2 y$;

   c) $f = e^{xyz}$;

   d) $f = z - 4\sqrt{x^2+y^2}$;

   e) $f = \operatorname{arctg}(y/x)$;

   f) $f = e^{x^2-y^2\cos 2xy}$.

Uždaviniai

4. Raskite duoto vektorinio lauko $\vec{f}$ rotorių:

   a) $\vec{f} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$;

   b) $\vec{f} = (y,\ 2x^2,\ 0)$;

   c) $\vec{f} = (\ln(x^2 + y^2),\ 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ 0)$;

   d) $\vec{f} = (e^x \cos y,\ e^x \sin y,\ 0)$;

   e) $\vec{f} = (\sin y,\ \cos z,\ -\operatorname{tg} x)$;

   f) $\vec{f} = (y^n,\ z^n,\ x^n)$, kur $n \in \mathbb{N}$.

5. Duotas stacionariojo skysčio tekėjimo greičio laukas $\vec{v}$. Išsiaiškinkite, ar skystis yra nespūdusis, ar tekėjimas yra besūkuris? Pavaizduokite tekėjimą, rotoriaus lauką:

   a) $\vec{v} = -x^2\vec{j}$;

   b) $\vec{v} = (0,\ z^2,\ 0)$;

   c) $\vec{v} = (-y^2,\ 4,\ 0)$;

   d) $\vec{v} = (x,\ -y,\ 0)$;

   e) $\vec{v} = (y^3,\ -x^3,\ 0)$,

   f) $\vec{v} = (x,\ -y,\ z)$.

Uždaviniai

6. Tarkime, kad $\vec{u} = (y^2,\ z^2,\ x^2)$, $\vec{v} = (yz,\ zx,\ xy)$, $f = xyz$ ir $g = x+y+z$. Apskaičiuokite reiškinius (kai galima, dviem būdais: pagal apibrėžimą ir panaudodami vieną iš rotoriaus operatoriaus savybių):

   a) $\operatorname{rot}\vec{v}$, $\operatorname{rot}(f\vec{v})$, $\operatorname{rot}(g\vec{v})$;

   b) $\operatorname{rot}(f\vec{u})$, $\operatorname{rot}(g\vec{v})$;

   c) $\vec{u}\times\operatorname{rot}\vec{v}$, $\vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{v}$;

   d) $\vec{u}\cdot\operatorname{rot}\vec{v}$, $\vec{v}\cdot\operatorname{rot}\vec{u}$;

   e) $\operatorname{rot}(\vec{u}\times\vec{v})$, $\operatorname{rot}(\vec{v}\times\vec{u})$.

9. Duotas vektorinis laukas $\vec{v}$. Apskaičiuokite $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{v})$ ir $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{v})$.

   a) $\vec{v}(x,y,z) = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$;

   b) $\vec{v}(x,y,z) = (x^2+y^2)\vec{i} + (y^2+z^2)\vec{j} + (z^2+x^2)\vec{k}$;

   c) $\vec{v}(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$.